A remark on a splitting theorem for blocks with abelian defect groups (Cohomology theory of finite groups)

渡辺, アツミ

数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 76-79

A remark on a splitting theorem for blocks with abelian defect groups

渡辺アツミ (熊本大学　理学部)
Atsumi Watanabe

$(K,\mathcal{O},F)$ を素数 p に対する p-modular 系とする, すなわち $\mathcal{O}$ は完備な離散付値環で, K, F はそれぞれ $\mathcal{O}$ の 商体, 剰余体であって標数が $0, p$ のものとする. しかも K は十分大きい体であると仮定する. G を有限群, B を群環 $\mathcal{O}G$ の block ($\mathcal{O}G$ の両側直既約な直和因子), D を B の defect group とする. $(\mathcal{O}G)^D = \{x \in \mathcal{O}G | dx = xd\ (\forall x \in D)\}$ とおき, Br_D を $(\mathcal{O}G)^D$ から $FC_G(D)$ への Brauer 準同型とする. γ を $\mathrm{Br}_D(j) \neq 0$ となる B^D の原始巾等元の B^D の単数群の共役の作用による orbit とする. $j \in \gamma$ に対し $B_\gamma = jBj$ は B の source algebra とよばれる.

$$d \in D \longrightarrow jd = dj \in (B_\gamma)^\times$$

により B_γ は interior D-algebra となる. ここで $(B_\gamma)^\times$ は B_γ の単数群である. b を Brauer 対応によって B に associate される $C_G(D)$ の block の一つとし, $N = N_G(D,b)$ とおく. 以下において D は abelian とし次の性質を持つ D の直積分解

$$D = D_1 \times D_2,\ D_1 \subseteq C_D(N),\ D_2 \text{ は } N-\text{不変}$$

が与えられているとする. このとき $\mathcal{O}D_i$ $(i=1,2)$ は自然に interior D - algebra になる. 以上の仮定のもと次の問題が提起されている.

問題 1 (Fan [3]). ある interior D-algebra $\tilde{B}_\gamma$ に対して

$$B_\gamma \cong \mathcal{O}D_1 \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{B}_\gamma \quad (\text{as interior } D-\text{algebras}),$$

但し右辺は diagonal action によって interior D-algebra とみている.

この問題について次のことが知られている. D_1 が G の中心に含まれる場合には上の問題は正しい (Fan [3], Külshammer - Okuyama - Watanabe [5]). F 上の block の source algebra に対しては上の問題は正しい (Okuyama). 一方 block B のテンサー積への分解について次の問題が提起されている.

問題 2 (Koshitani-Külshammer [4]). これまでの記号の下 H を指数が p の巾である G の正規部分群とする. A を H の block で B によって cover されかつ G-不変なものとする. もし D が $D = R \times (D \cap H)$ と直積分解されるならば

$$B \cong \mathcal{O}R \otimes_{\mathcal{O}} A \quad (\mathit{as}\ \mathcal{O}-\mathit{algebras}).$$

上の問題は F 上では正しいこと及び $R \subseteq C_D(N)$ と仮定してよいことが分かっている ([4]). 従って $R \subseteq C_D(N)$ を仮定する. 以下の補題においてこの問題が正しくなるための十

分条件を与える. 一般に G, H を有限群, e, f をそれぞれ $\mathcal{O}G$, $\mathcal{O}H$ の 中心巾等元とする. μ を $(KGe, KHf)-$ 両側加群から得られる $G \times H$ の指標の有理整結合とする.

Perfect isometry の定義 (Broué [1])

$$\text{(i)} \qquad \forall h \in H, \forall g \in G, \quad \frac{\mu(g,h)}{|\, C_H(h)\, |} \in \mathcal{O} \text{ かつ } \frac{\mu(g,h)}{|\, C_G(g)\, |} \in \mathcal{O},$$

$$\text{(ii)} \qquad \mu(g,h) \neq 0 \text{ のとき} \quad g \text{ が } p-\text{正則} \leftrightarrow h \text{ が } p-\text{正則}$$

となるとき μ は perfect であると言う. 一般に $\mathcal{R}_K(G, \mathcal{O}Ge)$ を KGe-加群から得られる G の指標の有理整結合の全体とする. 写像 $I_\mu : \mathcal{R}_K(H, \mathcal{O}Hf) \to \mathcal{R}_K(G, \mathcal{O}Ge)$ を

$$\forall \beta \in \mathcal{R}_K(H, \mathcal{O}Hf), I_\mu(\beta)(g) = \frac{1}{|\, H\, |} \sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1})\beta(h), (g \in G).$$

で定義する. μ が perfect で I_μ が $\mathcal{R}_K(H, \mathcal{O}Hf)$ と $\mathcal{R}_K(G, \mathcal{O}Ge)$ の間の linear isometry であるとき I_μ を perfect isometry と言う. 次の補題における isotypy の定義及び性質については [1], [9] を参照下さい. また R の指標 λ と $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し $\lambda * \chi$ は Broué-Puig [2] で定義されている B に属する G の一般指標を表す.

補題 3. 問題 2 の条件の下 $C = C_G(R)$, $B' = b^{C_G(R)}$ とおく. $\mathcal{R}_K(C, B')$ から $\mathcal{R}_K(G, B)$ の上への次の性質を持つ perfect isometry I が存在するならば問題 2 は正しい.

$$I(\lambda * \chi') = \lambda * I(\chi') \quad (\forall \lambda \in \mathrm{Irr}(R), \quad \forall \chi' \in \mathrm{Irr}(B')).$$

特に B' と B が isotypic ならば問題 2 は正しい. さらに $D_1 = R$, $D_2 = D \cap R$ に対して問題 1 が正しい.

証明の概略. E' を B' に対応する $\mathcal{O}C$ の block idempotent とする. 任意の $\chi' \in \mathrm{Irr}(B')$ に対して $I(\chi') = \pm\chi$, $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ とする. 又 $e_{\chi'}$ を χ' に対応する KC の中心原始巾等元とする. 仮定と Broué の定理 ([1], Th. 1.5) から I は

$$f(e_{\chi'}) = e_\chi \ (\forall \chi' \in \mathrm{Irr}(B')), \ f(Z(B')) = Z(B)$$

を満たす $Z(KB')$ から $Z(KB)$ への同型 f を導く. ここで $Z(B')$ は B' の中心を表す. $\mathcal{O}RE' \subseteq Z(B')$ である. 各 $r \in R$ に対して $f(rE') \in Z(B')$. $z_r = f(rE')$ とおく.

$$z_r = f(\sum_{\chi' \in \mathrm{Irr(B')}} re_{\chi'}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \omega_{\chi'}(r)e_\chi$$

が成立する, ここで $\chi'(r) = \omega_{\chi'}(r)\chi'(1)$. 従って

$$(*) \qquad z_r = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \frac{\chi(1)}{\chi'(1)} \chi'(r)\chi(g^{-1})g.$$

仮定から $(\lambda * \chi)' = \lambda * \chi'$ であるが, $G = RH$ (半直積), $C = R \times C_H(R)$ により λ をそれぞれ G と C の指標と見るときさらに $\lambda * \chi = \lambda\chi$, $\lambda * \chi' = \lambda\chi'(\lambda \in \mathrm{Irr}(R)$, $\chi' \in \mathrm{Irr}(B')$, $\chi \in \mathrm{Irr}(B))$ が成り立つことが分かる. 故に (*) と 指標の直交関係から z_r は Hr の元の $\mathcal{O}$-一次結合となることが分かる. しかも $z_r r^{-1}$ は A の単元である. 故に $z_r A = rA$. さらに $\tilde{R} = \{z_r | r \in R\}$ は R と同型な群をなす. 従って $B = RA = (\mathcal{O}\tilde{R})A \cong \mathcal{O}\tilde{R} \otimes_{\mathcal{O}} A \cong \mathcal{O}R \otimes_{\mathcal{O}} A$ を得る. 以上より.

後半について. [6, Prop. 6.2] より γ の中には $j \in A$ となるものが存在する. 従って上の議論から

$$B_\gamma = (\mathcal{O}\tilde{R})jAj \cong \mathcal{O}\tilde{R} \otimes_{\mathcal{O}} jAj \cong \mathcal{O}R \otimes_{\mathcal{O}} jAj \quad (as\ \mathcal{O}-algebras)$$

が得られる. 一方

$$rd_2 \in D = R \times D_2 \longrightarrow z_r^{-1} r d_2 j \in (jAj)^\times$$

により jAj は interior D-algebra になる. しかも $B_\gamma \cong \mathcal{O}R \otimes_{\mathcal{O}} jAj$ (as interior D-algebras) が確かめられる.

最初の設定に戻って L を D の $N/C_G(D)$ による半直積とする. 次のことは Puig-Usami [7, §3] における (G, B)-local system と Watanabe [8, Corollary 2] を用いて得られる.

命題 4 (Watanabe [10], Prop.2). 交換子群 $[D, N]$ が巡回群であるならば次の性質を満たす $\mathcal{R}_K(L)$ から $\mathcal{R}_K(G, B)$ への perfect isometry Δ が存在する.

$$\Delta(\lambda * \eta) = \lambda * \Delta(\eta) \quad (\forall\lambda \in \mathrm{Irr}(D_1),\ \ \forall\eta \in \mathrm{Irr}(L)).$$

なお $\mathcal{R}_K(L)$ は L の一般指標の全体を表す.

従って $N = N_G(D, b) \subseteq C_G(D_1)$ に注意すれば 補題 3 と命題 4 より次の結果が得られる.

系 5 $[D, N]$ が巡回群のときには問題 2 は正しい.

文献

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182**(1990), 61-92.

[2] M. Broué and L. Puig, Characters and local structure in G-algebra, J. Algebra, 63(1980), 306-3i7.

[3] Y. Fan, Relative local control and the block source algebras, Science in China (Ser. A) 40(1997), 785-798.

[4] S. Koshitani and B. Külshammer, A splitting theorem for blocks, Osaka J. Math. 33 (1996), 343-346.

[5] B. Külshammer and T. Okuyama and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras.

[6] B. Külshammer and L. Puig, Extensions of nilpotent blocks. Invent. Math. 102 (1990), 17-71.

[7] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, J. Algebra 160(1993), 192-225.

[8] A. Watanabe, Notes on p-blocks of characters of finite groups, J. Algebra, 136(1991), 109-116.

[9] A. Watanabe, Isotypies for blocks of finite groups afforded by the Glauberman correspondences, 数理解析研究所講究録 1057, 有限群のコホモロジー論、1998.

[10] A. Watanabe, On the principal blocks of finite groups with abelian Sylow p-subgroups II.